

Anwendung einer Switched-System Modellierung zur Stabilitätsanalyse von zeitkontinuierlichen singlebit $\Sigma\Delta$ -Wandlern

S. Stegemann¹, C. Zorn¹, T. Brückner², M. Ortmanns², and W. Mathis¹

¹Institut für theoretische Elektrotechnik, Leibniz Universität Hannover, Appelstraße 9A, 30167 Hannover, Deutschland

²Institut für Mikroelektronik, Universität Ulm, Albert-Einstein-Allee 43, 89081 Ulm, Deutschland

Zusammenfassung. Im Hinblick auf die Optimierung von zeitkontinuierlichen $\Sigma\Delta$ -Wandlern ist ein genaues Verständnis der dynamischen Eigenschaften des Systems von essentieller Bedeutung. In dieser Arbeit wird der $\Sigma\Delta$ -Modulator dafür in die Klasse der Mixed-Signal Systeme eingeordnet und als Übertragungssystem mit geschalteter Rückkopplung betrachtet. Mit diesem Switched-System-Modell können unter Zuhilfenahme einer geeigneten Zustandsraumdarstellung die Signalamplituden der internen Integratoren sowie die Maximalamplitude am Quantisierereingang bestimmt werden. Unter Verwendung einer Worst-Case Analyse ist es damit möglich, Aussagen über den Aussteuerbereich der Integratoren sowie der maximal stabilen Eingangsamplitude zu treffen. Die Vorgehensweise wird anhand eines Beispielmotors dargestellt.

1 Einleitung

Aufgrund der stetig steigenden Anzahl von Mixed-Signal Anwendungen in der modernen Signalverarbeitung steigen die Anforderungen an die Verarbeitungsgeschwindigkeit und die Genauigkeit von Analog/Digital-Wandlern (A/D-Wandlern). Diese Schaltungsblöcke stellen das kritische Bindeglied zwischen analoger und digitaler Schaltungstechnik dar, welche gemeinsam auf einem Chip untergebracht sind. Die zum Entwurf von Mixed-Signal Schaltungen verwendeten Tools ermöglichen dabei oft nur einen geringen Freiheitsgrad bei der Optimierung oder basieren auf einer sehr großen Anzahl zeitaufwändiger Simulation.

Eine der am häufigsten zur A/D-Wandlung verwendeten Architektur ist der $\Sigma\Delta$ -Wandler. Dieser Konverter kann mit relativ geringer Gesamtfläche in mixed-signal Schaltungen integriert werden. Bei der Verwendung von zeitkontinuierlichen $\Sigma\Delta$ -Wandlern findet die Abtastung innerhalb der Rückführungsschleife statt, so dass auch alle entstehenden Nicht-

idealitäten des Abtastvorgangs der Rauschformung unterliegen (Ortmanns and Gerfers, 2006).

Der wichtigste Faktor beim Entwurf von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren ist die Berücksichtigung der Stabilität (vgl. z.B. Norsworthy et al., 1997; Ardanian and Paulos, 1987; Risbo, 1994). Dabei ist es erstrebenswert, stabiles Verhalten für einen möglichst großen Bereich der Eingangsamplitude des Modulators zu erreichen. Die Auswirkung instabiler Verhaltens resultiert dabei in einem Signal-zu-Rauschabstand (SNR) des Ausgangssignals, welches keinen positiven Wert mehr für große Eingangsamplituden aufweist. Wenn das Ausgangssignal eines Systems, welches ein Signal überträgt, kein positives SNR aufweist, kann keine Information über das Eingangssignal zurückgewonnen werden. Der drastische Abfall des SNR ab einer bestimmten Eingangsamplitude des $\Sigma\Delta$ -Wandlers hat dabei im wesentlichen zwei Ursachen. Zum einen steigt mit der Eingangsamplitude auch die maximale Amplitude des Ausgangssignals des Schleifenfilters und damit die Maximalaussteuerung am Eingang des Quantisierers. Wird der Quantisierer schließlich übersteuert, ist der resultierende Quantisierungsfehler derart groß, dass am Ausgang keine Information des Eingangssignals mehr enthalten ist. Die zweite Ursache für den Informationsverlust bei großen Eingangsamplituden ist im Verhalten real implementierter Integratoren begründet. Diese besitzen einen begrenzten linearen Ausgangsbereich, da für große Eingänge die Ausgangsspannung der Verstärker eines internen Integrators in Sättigung gerät (Hein and Zakhor, 1993).

In dieser Arbeit werden durch eine geeignete Zustandsraumbetrachtung des Schleifenfilters die Ausgangsamplituden der internen Integratoren in Abhängigkeit der Eingangsamplitude untersucht. Der $\Sigma\Delta$ -Modulator wird dabei als Switched System modelliert und eine Worst-Case Analyse zur Bestimmung des maximalen Aussteuerbereichs der Integratoren und des Quantisiereingangs vorgestellt. Die Anwendung dieser Methode wird abschließend an einem Beispiel verdeutlicht.



Correspondence to: C. Zorn
(zorn@tet.uni-hannover.de)

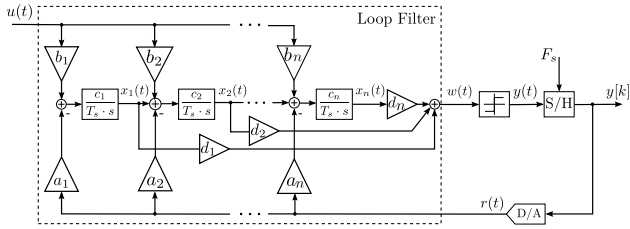


Abb. 1. Zeitkontinuierlicher $\Sigma\Delta$ -Modulator der Ordnung n .

2 Switched-System Modell

Der zeitkontinuierliche $\Sigma\Delta$ -Modulator mit dem Eingangssignal $u(t)$ und dem Ausgangssignal $y[k]$ nach Abb. 1 kann beschrieben werden als ein lineares, zeitinvariantes Schleifenfilter innerhalb einer Rückführungsschleife. Das Ausgangssignal $w(t)$ des Schleifenfilters wird quantisiert und mit einer Abtastfrequenz $F_s = \frac{1}{T_s}$ zu äquidistanten Zeitpunkten $t = \frac{k}{F_s}$ abgetastet. Im Falle eines singlebit Quantisierers ist das Ausgangssignal $y[k]$ des $\Sigma\Delta$ -Modulators gegeben durch:

$$y[k] = \text{sign}(w[k]) = \begin{cases} +1 & \text{für } w[k] \geq 0 \\ -1 & \text{für } w[k] < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Das Rückführungssignal nimmt nur zwei verschiedene, skalierte Werte $r(t) \in \{-1, 1\}$ an, zwischen denen in Abhängigkeit des Quantisiereingangs $w(t)$ umgeschaltet wird. Das Schleifenfilter kann daher in das äquivalente System mit zwei Eingängen $u(t)$ und $r(t)$ nach Abb. 2 transformiert werden. Der Eingang $r(t)$ wird zwischen zwei konstanten Quellen (+1 und -1) umgeschaltet. Dieser Schaltvorgang wird durch ein Mixed-Signal-System geregelt, welches das Teilsystem bestehend aus Quantisierer, Abtastung und Digital/Analog-Wandler der Rückführung repräsentiert (vgl. Abb. 1). Mit diesem Modellierungsansatz soll im Folgenden das dynamische Verhalten des Schleifenfilters im Zustandsraum beschrieben werden.

Sei $\mathbf{x}^T(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor des Schleifenfilters, wobei die Ausgänge der Integratoren als Zustandsgrößen x_i , mit $i = 1 \dots n$, aufgefasst werden und n der Ordnung des Schleifenfilters entspricht. Das dynamische Verhalten des Schleifenfilters wird dann beschrieben durch die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$w(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t). \quad (3)$$

Dabei sind $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Systemmatrix, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ die Eingangsmatrix und $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ der Ausgangsvektor. Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems linearer Differentialgleichungen nach Gleichung (2) ist für $t \in [t_i, t_{i+1})$ gegeben durch

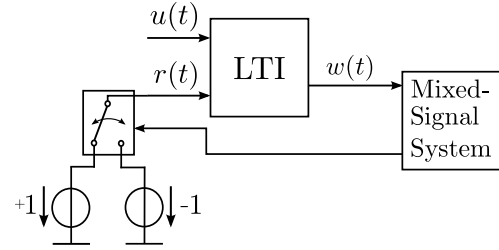


Abb. 2. Switched-System Modell des zeitkontinuierlichen $\Sigma\Delta$ -Modulator.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_i)} \mathbf{x}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B} \begin{bmatrix} u(s) \\ r(t_i) \end{bmatrix} ds, \quad (4)$$

wobei t_i und t_{i+1} zwei aufeinanderfolgende Umschaltzeitpunkte des Rückführungssignals $r(t)$ sind (Jordan, 2007; Sun and Ge, 2005). Da $r(t)$ aufgrund der Umschaltvorgänge stückweise stetig ist, muss auch die globale Lösung $\mathbf{x}(t)$ stückweise stetiges Verhalten aufweisen. Innerhalb des Zeitintervalls $[t_i, t_{i+1})$ verläuft $\mathbf{x}(t)$ jedoch stetig und linear, so dass mit Hilfe von Gleichung (4) für einen gegebenen Umschaltzeitpunkt $\mathbf{x}_i(t_i)$ der nächste Umschaltzeitpunkt $\mathbf{x}_{i+1}(t_{i+1})$ bestimmt werden kann, wenn die Rechte Seite von Gleichung (4) über ein gesamtes Abtastintervall der Länge $T_s = t_{i+1} - t_i$ integriert wird.

2.1 Dynamisches Verhalten im Zustandsraum

Die Gleichungen (1) und (3) teilen den Zustandsraum in die beiden Teilräume $S_+ = \{\mathbf{x}(t) \in S : \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \geq 0\}$ und $S_- = \{\mathbf{x}(t) \in S : \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) < 0\}$. Die Grenze dieser Teilmengen ist gegeben durch die Ausgangsgleichung (3) mit

$$w(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = 0. \quad (5)$$

Gleichung (5) kann interpretiert werden als die Parameterdarstellung einer Hyperebene der Dimension $(n-1)$. Im Zusammenhang mit geschalteten Systemen wird diese Ebene mit *Switching Surface* (SWS) bezeichnet (Gonçalves et al., 2001; Zorn et al., 2010). Das Rückführungssignal $r(t)$ ist bestimmt durch die Lage der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ zu einem Abtastzeitpunkt $t = kT_s$. Wenn zu einem Abtastzeitpunkt ein Punkt $\mathbf{x}(kT_s)$ des Teilraums S_+ abgetastet wird, dann gilt für das Ausgangssignal des Filters $w(kT_s) \geq 0$ und für das Rückführungssignal $r = +1$. Verläuft die Trajektorie bis zum nächsten Abtastzeitpunkt über die Switching Surface hinweg in den Teilraum S_- hinein, dann gilt zu diesem Zeitpunkt für das Ausgangssignal des Schleifenfilters $w((k+1)T_s) < 0$ und die Rückkopplung wird entsprechend auf $r = -1$ umgeschaltet. Die Rückkopplung bleibt von nun an solange negativ, bis die Zustandstrajektorie die Switching Surface ein weiteres mal schneidet und zum folgendem Abtastzeitpunkt die

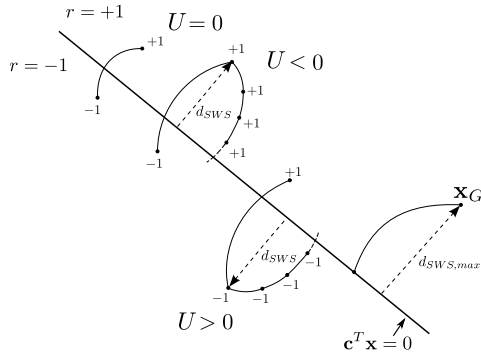


Abb. 3. Qualitatives Verhalten der Zustandstrajektorien $\mathbf{x}(t)$ in Abhängigkeit des konstanten Eingangssignals U .

Rückkopplung von $r = -1$ auf $r = +1$ umgeschaltet wird. Das qualitative Verhalten Lyapunov-stabiler Zustandstrajektorien $\mathbf{x}(t)$ in Abhängigkeit konstanter Eingangssignale U ist in Abb. 3 dargestellt. Das Eingangssignal U und die jeweilige Rückkopplung $r \in \{+1, -1\}$ beeinflussen die Dynamik des Zustandsvektors. Der Abstand des Zustandsvektors $d_{sws} = |w(t)|$ von der Switching Surface wird dabei umso größer, je größer der Betrag des Eingangssignals $|U|$ ist. Je größer der Abstand wird, desto größer sind auch die maximalen Amplitudenverläufe $x_i(t)$ der Integratoren. Um Aussagen über den Austerbereich der Integratoren und des Quantisierereingangs des $\Sigma\Delta$ -Modulators treffen zu können, werden in Abschnitt 3 diejenigen Trajektorien betrachtet, die den maximalen Abstand $d_{sws,max}$ (vgl. Abb. 3) zur Switching Surface aufweisen. Im Sinne einer Worst-Case Analyse werden dazu diejenigen Zustandsverläufe betrachtet, die einen Abtastpunkt $\mathbf{x}(kT_s)$ auf der Switching Surface aufweisen, da diese Trajektorien sich für ein gegebenes Eingangssignal am weitesten von der Switching Surface entfernen.

3 Maximalamplituden der Integratorausgänge

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zur Bestimmung der Maximalsteuerungen der Integratorausgänge und des Quantisierereingangs sowie der maximal stabilen Eingangsamplitude des $\Sigma\Delta$ -Modulators nach Abb. 1 vorgestellt. Dieses Verfahren beruht auf den Worst-Case-Annahmen und den Stabilitätsbetrachtungen, welche in Zorn et al. (2010) für Systeme mit geschalteter Rückführung behandelt wurden. Es werden dabei die Grenzen der invarianten Menge der Zustandstrajektorien $\mathbf{x}(t)$ mit stabilem Verhalten in Abhängigkeit des konstanten Eingangssignals U abgeschätzt. Ausgehend von Anfangswerten auf der Switching Surface, werden zur Bestimmung der Grenzen der invarianten Menge diejenigen Lösungen der Zustandsgleichungen (2) und (3) betrachtet, die mit dem maximalen Abstand $d_{sws,max}$ zur Switching Surface verlaufen. Nach Zorn et al. (2010) existiert eine sol-

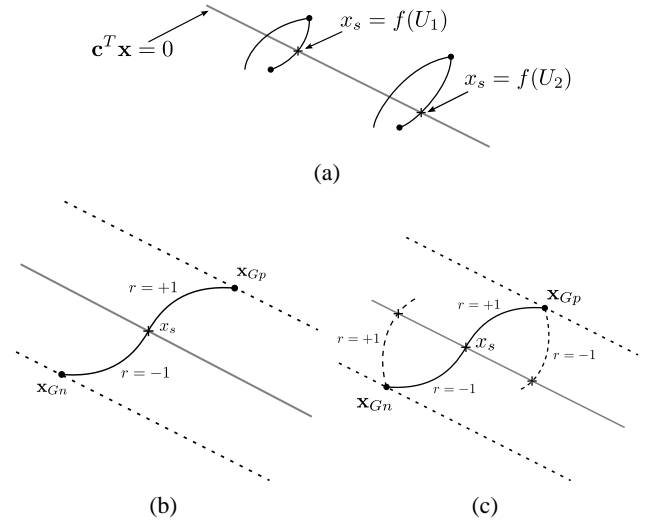


Abb. 4. Worst-Case Analyse. (a) *Schritt 1:* Bestimmung von Umschaltpunkten auf der Switching Surface als Anfangspunkte. (b) *Schritt 2:* Berechnung der nächsten Umschaltpunkte \mathbf{x}_{Gp} und \mathbf{x}_{Gn} durch Integration über ein Abtastintervall. (c) *Schritt 3:* Ausgehend von \mathbf{x}_{Gp} und \mathbf{x}_{Gn} müssen nach dem Umschalten die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ einen weiteren Schnittpunkt besitzen.

che invariante Menge nur, wenn die Zustandstrajektorien für beide Rückkopplungen immer einen weiteren Schnittpunkt mit der Switching Surface aufweisen. Ist dies für eine gegebene Eingangsamplitude nicht der Fall, wachsen alle Zustandsgrößen betragsmäßig ins unendliche und der Modulator ist instabil. Für diejenigen Eingangsamplituden, für die eine invariante Menge des dynamischen Verlaufs der Zustandsgrößen existiert, sind die Grenzen dieser Menge ein Maß für die maximalen Amplituden an den Ausgängen der Integratoren.

Die Worst-Case Analyse läuft dabei ab wie folgt. Ausgehend von Anfangswerten \mathbf{x}_s auf der Switching Surface werden durch Integration die nächsten Abtastwerte für beide Rückkopplungen $r = +1$ und $r = -1$ berechnet. Für konstante Eingangssignale U erhält man nach Gleichung (4):

$$\mathbf{x}_{Gp}(U) = e^{\mathbf{A}T_s} \mathbf{x}_s + \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}s} d\mathbf{s} \mathbf{B} \begin{bmatrix} U \\ +1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_{Gn}(U) = e^{\mathbf{A}T_s} \mathbf{x}_s + \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}s} d\mathbf{s} \mathbf{B} \begin{bmatrix} U \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Nach den Betrachtungen aus Abschnitt 2.1 und aufgrund der Integration über ein vollständiges Abtastintervall haben die Umschaltunkte nach Gleichungen (6) und (7) den maximalen Abstand zur Switching Surface. Am Punkt $\mathbf{x}_{Gp}(U)$ wird zum Zeitpunkt $t = T_s$ die Rückkopplung von $r = +1$ auf $r = -1$ umgeschaltet. Am Punkt $\mathbf{x}_{Gn}(U)$ wird entsprechend von $r = -1$ auf $r = +1$ umgeschaltet. Für $t > T_s$ sind die weiteren Verläufe der Trajektorie für die entsprechenden Rückkopplungen gegeben durch:

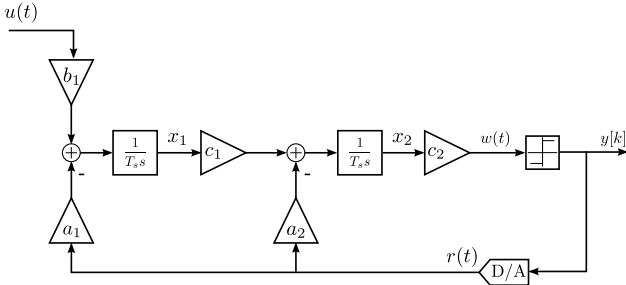


Abb. 5. Modulator 2. Ordnung. Koeffizienten: $a_1 = -b_1 = 0,216$, $a_2 = 0,667$, $c_1 = c_2 = 1$.

$$\mathbf{x}_p(t, U) = e^{\mathbf{A}t} x_{Gp}(U) + \int_0^t e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B} \begin{bmatrix} U \\ -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_n(t, U) = e^{\mathbf{A}t} x_{Gn}(U) + \int_0^t e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B} \begin{bmatrix} U \\ +1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Hier wurden die maximalen Umschaltunkte als neue Anfangswerte verwendet. Die maximalen Zustandsvariablen in Abhängigkeit des Eingangs U sind dann gegeben durch die Funktionenscharen $\mathbf{x}_p(t, U)$ und $\mathbf{x}_n(t, U)$. Die jeweiligen Ausgangssignale für positive und negative Rückkopplung sind:

$$w_p(t, U) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p(t, U) \quad (10)$$

$$w_n(t, U) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_n(t, U). \quad (11)$$

Die Trajektorien \mathbf{x} schneiden die Switching Surface nur, wenn $w(t, U) = 0$ für irgendein $t < \infty$ und $U < U_{\max}$. D.h., dass diejenigen $U > U_{\max}$, für die die Ausgangsfunktionen $w_p(t, U)$ und $w_n(t, U)$ keine Nullstellen mehr besitzen, zu instabilen Verhalten des $\Sigma\Delta$ -Modulator führen. In diesem Fall wachsen die Zustandsgrößen $x_i(t)$ und damit die Integratorausgänge unbegrenzt an und es kann keine invariante Menge für die Punkte der Zustandsdynamik existieren.

4 Betrachtung von Modulatoren beliebiger Ordnung

Für $\Sigma\Delta$ -Modulatoren beliebiger Ordnung, die sich als Blockstruktur nach Abb. 1 darstellen lassen, besitzen die Systemmatrix \mathbf{A} und die Eingangsmatrix \mathbf{B} immer die Formen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & -a_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & -a_n \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Die Matrix \mathbf{A} ist eine strikte untere Dreiecksmatrix und besitzt lediglich auf der ersten, unteren Nebendiagonalen von Null verschiedene Einträge. Die Systemmatrizen von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren in Chain-of-Integrators Topologie ohne lokale

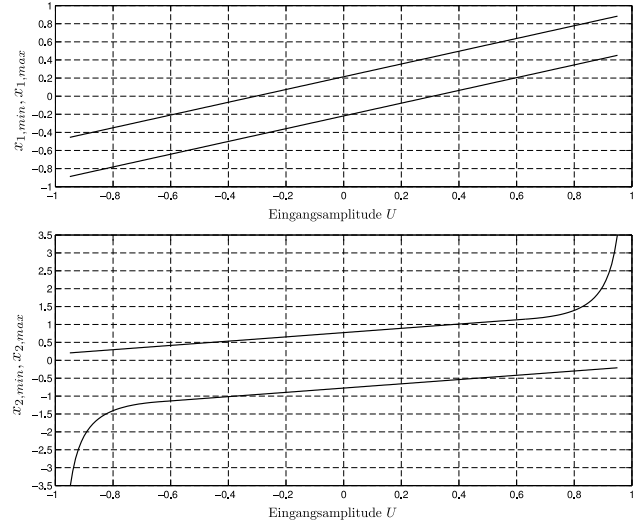


Abb. 6. Maximale Integratoramplituden des Modulators 2. Ordnung in Abhängigkeit der Eingangsamplitude.

Rückführschleifen sind daher immer nilpotent. Das Matrixexponential, welches in den Gleichung (6) bis (9) der Worst-Case Analyse bestimmt werden muss ist wie folgt definiert:

$$e^{\mathbf{A}T_s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\mathbf{A}T_s)^m \quad (13)$$

Aufgrund der Nilpotenz der Matrix \mathbf{A} bricht diese Reihe immer nach endlich vielen Gliedern ab und die Gleichung (6) bis (9) können analytisch berechnet werden. Der Verlauf der Zustandstrajektorien zwischen zwei Umschaltunkten führt mit Gleichung (8) und (9) für konstante Eingangssignale immer auf Polynome der Zeit t , welche mit U parametrisiert sind. Die Ausgangssignale für die jeweiligen Rückkopplungen $w_p(t, U)$ und $w_n(t, U)$ sind dann ebenfalls Polynome. Für den Nachweis stabilen Verhaltens für ein gegebenes Eingangssignal ist nach Abschnitt 3 für die hier betrachteten Modulatortypen immer ein Nullstellenproblem zu lösen. Für die Bestimmung der maximalen Integratorlevel muss das entsprechende Extremwertproblem behandelt werden.

4.1 Modulator 2. Ordnung

Abbildung 5 zeigt den $\Sigma\Delta$ -Modulator zweiter Ordnung, der beispielhaft mit der hier vorgestellten Worst-Case Analyse untersucht werden soll. Die Zustandsraumdarstellung des Schleifenfilters lautet:

$$\mathbf{R}(t) = F_s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + F_s \begin{bmatrix} 0.216 & -0.216 \\ 0 & -0.667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$w(t) = [0 \ 1]. \quad (15)$$

Mit gegebenen Anfangswerten auf der Switching Surface, welche vom Eingangssignal U abhängen, können die Umschaltunkte mit maximalen Abstand bestimmt werden. Man

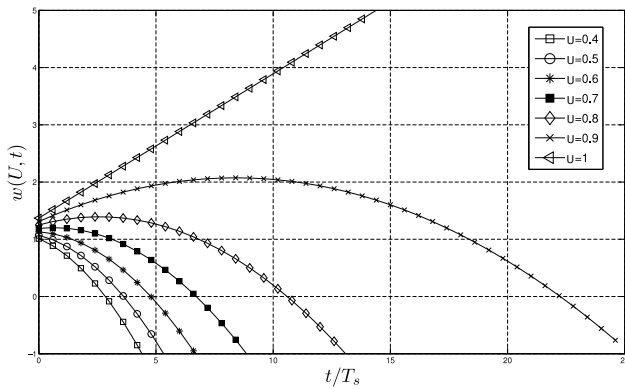


Abb. 7. Ausgangssignal des Modulators zweiter Ordnung in Abhängigkeit von U und t .

erhält folgende vektorwertige Funktionen für beide Rückkopplungen der maximalen Umschaltpunkte:

$$\mathbf{x}_{Gp} = \begin{bmatrix} 0.705u - 0.218 \\ 0.596u - 0.777 \end{bmatrix}, \text{ für } r = +1 \quad (16)$$

$$\mathbf{x}_{Gn} = \begin{bmatrix} 0.705u + 0.214 \\ 0.596u + 0.773 \end{bmatrix}, \text{ für } r = -1 \quad (17)$$

Ausgehend von diesen Umschaltpunkten erhält man die in Abb. 6 dargestellten Maxima und Minima der Integratorausgänge in Abhängigkeit des Eingangssignals U . Das Ausgangssignal in Abhängigkeit von U und t ist in Abb. 7 dargestellt. Für größere Eingangsamplituden verschiebt sich der Nulldurchgang des Ausgangssignals zu größeren Zeiten t .

Abbildung 8 zeigt den Verlauf des SNR in Abhängigkeit der Leistung des Eingangssignals unter Verwendung eines Sättigungsmodells für die Integratoren des Schleifenfilters. Dabei wurde folgende Sättigungscharakteristik zugrunde gelegt:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x & \text{für } |x| \leq L \\ L \cdot \text{sign}(x) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (18)$$

mit $L = 1$. Anhand der Analyse der maximalen Integratorlevel (vgl. Abb. 6) ist zu erkennen, dass für Eingangssignale $|U| \geq 0,4$ der Ausgang des dritten Integrators dieses Sättigungslevel erreicht. Dieses Eingangssignal entspricht einer auf den Full-Scale von Eins bezogenen Eingangsleistung von $P_{in} = -7.95\text{dBFS}$, ab dem das SNR keinen positiven Wert mehr aufweist (vgl. Abb. 8).

5 Diskussion

In der vorgestellten Arbeit wurde gezeigt, wie das Modell eines geschalteten Systems auf den $\Sigma\Delta$ -Modulator übertragen und zur Stabilitätsanalyse des Systems genutzt werden kann. Eine zur Stabilitätsanalyse entwickelte Worst-Case Analyse wurde anhand eines Beispielmodulators vorgeführt. Dabei

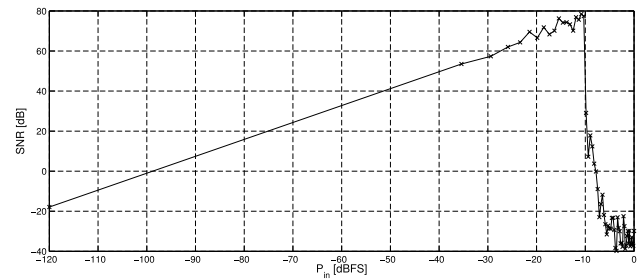


Abb. 8. Dynamic Range des Modulators aus Abb. 5. Abtastrate $F_s = 320\text{ kHz}$, Bandbreite $f_B = 1\text{ kHz}$, Eingangsfrequenz $f = 625\text{ Hz}$.

wurde gezeigt, wie die maximal stabile Eingangsamplitude für Bounded-Input/Bounded-State-Verhalten und der Aussteuerbereich der Integratorausgänge bestimmt werden können.

Danksagung. Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für ihre Unterstützung im Rahmen des Projektes MA 1159/12-1.

Literatur

- Ardalan, S. and Paulos, J.: An analysis of nonlinear behavior in delta – sigma modulators, *Circuits and Systems*, IEEE Transactions on, 34, 593–603, 1987.
- Gonçalves, J. M., Megretski, A., and Dahleh, M. A.: Global stability of relay feedback systems, *Automatic Control*, IEEE Transactions on, 46, 550–562, doi:10.1109/9.917657, 2001.
- Hein, S. and Zakhor, A.: *Sigma Delta Modulators: nonlinear decoding algorithms and stability analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- Jordan, D. W.: *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, 2007.
- Norsworthy, S. R., Schreier, R., and Temes, G. C., eds.: *Delta-Sigma Data Converters Theory, Design, and Simulation*, IEEE Press, 1997.
- Ortmanns, M. and Gerfers, F.: *Continuous-Time Sigma-Delta A/D Conversion Fundamentals, Performance Limits and Robust Implementations*, Springer Series in Advanced Microelectronics, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- Risbo, L.: Stability predictions for high-order $\Sigma - \Delta$ Modulators based on quasilinear modeling, in: *Circuits and Systems*, 1994. ISCAS '94., 1994 IEEE International Symposium on, 5, 361–364, doi:10.1109/ISCAS.1994.409382, 1994.
- Sun, Z. and Ge, S. S.: *Switched Linear Systems - Control and Design*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, 2005.
- Zorn, C., Stegemann, S., and Mathis, W.: An approach to stability analysis of transfer systems with switched feedback, in: *Signals and Electronic Systems (ICSES)*, 2010 International Conference on, 181–184, 2010.